Algorytmiczna wyuczalność jako model obliczeniowych kompetencji arytmetycznych

Michał Tomasz Godziszewski

24 listopada 2013

Streszczenie

Jednym z wyzwań stojącym przed kognitywistyką jest pytanie o adekwatną teorię nabywania wiedzy i uczenia się pojęć. Jedną z prób odpowiedzi na to pytanie jest model algorytmicznej wyuczalności, zaproponowany w [4], [5] oraz [7] przez Marka Golda i Hilary'ego Putnama. Powiemy, że relacja R jest algorytmicznie wyuczalna, jeśli istnieje rekurencyjny ciąg rekurencyjnych relacji $S_0, S_1, S_2, \ldots = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $\chi_R = \lim_{n\to\infty} \chi_{S_n}$[1]. Zakłądając, że ludzki umysł może być modelowany jako podmiot poznawczy wykonujący algorytmiczne operacje, o relacjach wyuczalnych możemy mówić także jako o poznawalnych w granicy. Umysł, ucząc się jakiegoś pojęcia, posługuje się techniką prób i błędów - generuje ciąg hipotez dotyczących poznawanej relacji. Hipotezy te mogą się zmieniać w obliczu nowych informacji, ale od pewnego miejsca (nie mając pewności co do poprawności odpowiedzi) uczeń ustala właściwą hipotezę dotyczącą danego pojęcia. Okazuje się, że klasa pojęć wyuczalnych pokrywa się z klasą twierdzeń zbieżnych logik eksperymentalnych, zdefiniowanych przez Roberta Jeroslowa w [6]. Pojęcie logiki eksperymentalnej utożsamiamy z pewnym rekurencyjnym predykatem $H(t, x, y)$, odczytywanym intuicyjnie w następujący sposób: *W czasie t, ciąg zdań o numerze Gödla y jest akceptowany jako uzasadnienie formuły o numerze Gödla x.* Twierdzenia logiki H nazywamy **formułami powracającymi** i określamy przez warunek:

$$Rec_H(x) \equiv \forall t \exists s \geq t \exists y H(s, x, y).$$

Definiujemy także zbiór **formuł stabilnych** logiki H następująco:

$$Stbl_H(x) \equiv \exists t \exists y \forall s \geq t H(s, x, y).$$

[1]definicja ta jest oczywiście równoważna innej, znanej z literatury: R jest algorytmicznie wyuczalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje całkowita funkcja obliczalna $g : \mathbb{N}^2 \to \{0, 1\}$ taka, że dla wszystkich $x \in \mathbb{N}$: $\lim_{t\to\infty} g(x, t) = 1 \Leftrightarrow x \in R$ oraz $\lim_{t\to\infty} g(x, t) = 0 \Leftrightarrow x \notin R$.

Logika H jest **zbieżna**, jeśli wszystkie formuły powracające są stabilne.
Opierając się na wynikach Jeroslowa, staramy się udzielić (satysfakcjonującej dla algorytmicznej teorii uczenia się) odpowiedzi na pytanie o obliczeniowe przyczyny, dla których pewne pojęcia matematyczne są poznawczo trudne, tj. leżą poza zasięgiem naszych kompetencji arytmetycznych. Wiadomo, że zbiór twierdzeń rekurencyjnie aksjomatyzowalnej teorii arytmetycznej jest rekurencyjnie przeliczalny (Σ^0_1). Dowodzimy, że poprzez dołaczenie pewnego minimalnego, ale poznawczo istotnego zbioru zdań niezależnych do rekurencyjnej aksjomatyki arytmetycznej teorii oraz domknięcie otrzymanej sumy na operację wynikania, otrzymujemy teorię, która nie tylko nie jest rekurencyjnie przeliczalna, ale nie jest nawet algorytmicznie wyuczalna. Stąd, odpowiadająca tej teorii klasa pojęć nie może być efektywnie poznawalna. W szczególności, **z powodu algorytmicznej niewyuczalności, zdania nierozstrzygalne są poza zasięgiem obliczeniowych środków poznawczych, jakimi dysponujemy w ramach danej teorii**. Otrzymane rezultaty są rozwinięciem kognitywistycznej interpretacji twierdzeń Gödla i ich konsekwencji.

Literatura

[1] W. Craig, *On axiomatisability within a system*, **Journal of Symbolic Logic** 18 (1953), 30-32.

[2] S. Feferman, *Degrees of unsolvability associated with classes of formalized theories*, **Journal of Symbolic Logic** 22 (1957), 161-175.

[3] K. Gödel, *On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems I*, in: J. van Heijenoort (ed.), **From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic 1879-1931**, Harvard University Press, Cambridge MA, 1967, pp. 596-616.

[4] M.E. Gold, *Limiting Recursion*, **Journal of Symbolic Logic** 30 (1965), 28-48.

[5] M.E. Gold, *Language Identification in the Limit* **Information and Control** 10 (1967), 447-474.

[6] R. G. Jeroslow, *Experimental logics and Δ^0_2-theories*, **Journal of Philosophical Logic** 4 (1975), 253-267.

[7] H. Putnam, *Trial and Error Predicates and the Solution to a Problem of Mostowski*, **Journal of Symbolic Logic** 30 (1965), 49-57.